Autores: Alumnado de 1º Bachillerato Ciencias y Tecnología
Curso 2016-17
IES Valle del Jiloca

EL TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

¿QUÉ ESCONDE?

Trabajo basado en el artículo *Los secretos que esconde el triángulo de Pascal*, de la revista digital *El Aleph*

Un triángulo sencillo pero complejo

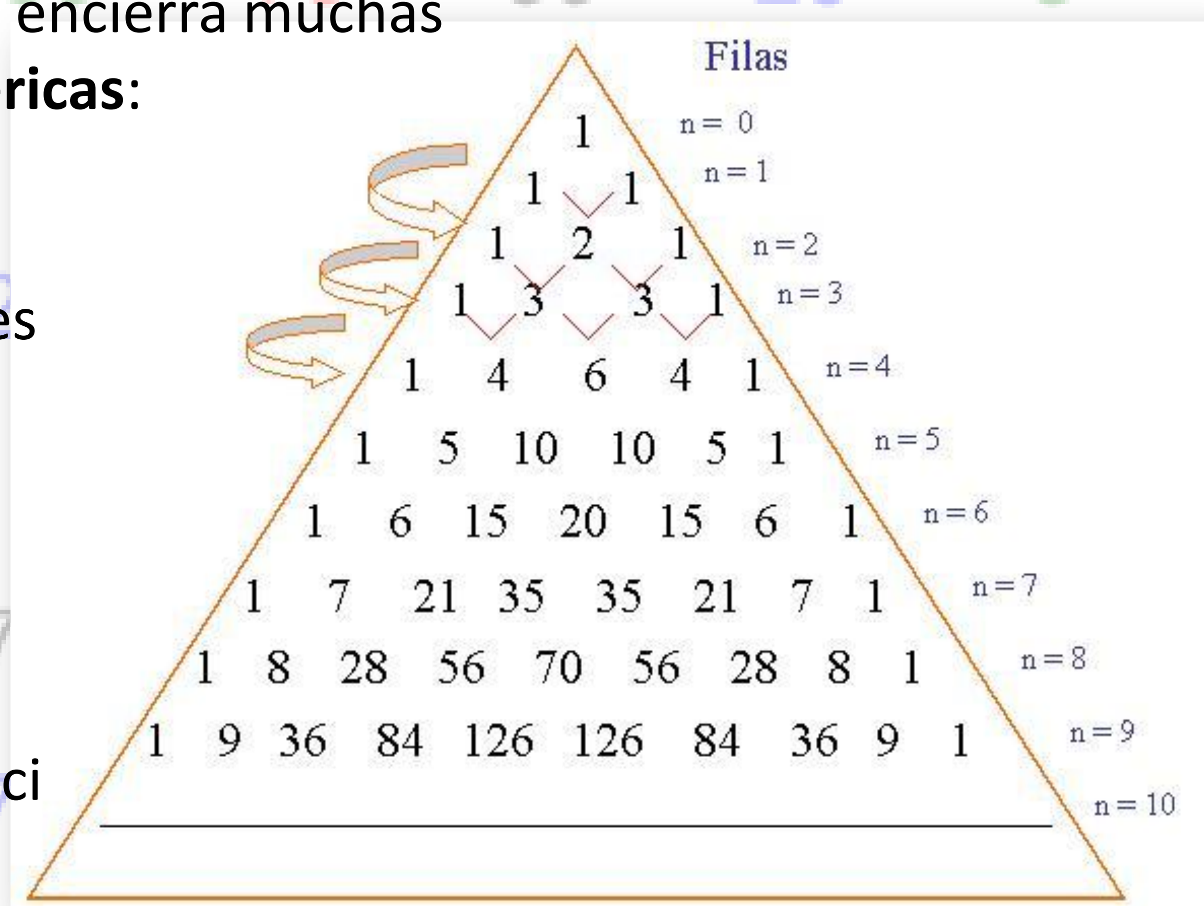
El **triángulo de Tartaglia o de Pascal** , también llamado *Aritmético*, es un triángulo de ***números enteros, infinito*** y ***simétrico***.
Es una representación de los ***coeficientes binomiales*** ordenados en forma triangular.
Se llama así en honor a los matemáticos ***Blaise Pascal*** (Francia, 1623-1662) y ***Nicolo Fontana "Tartaglia"*** (Italia, 1500-1557)

¿Cómo se forma?

Se empieza con un 1 en la primera fila, y en las filas siguientes se van colocando números de forma que cada uno de ellos sea la suma de los dos números que tiene encima.

El triángulo de Pascal encierra muchas **combinaciones numéricas**:

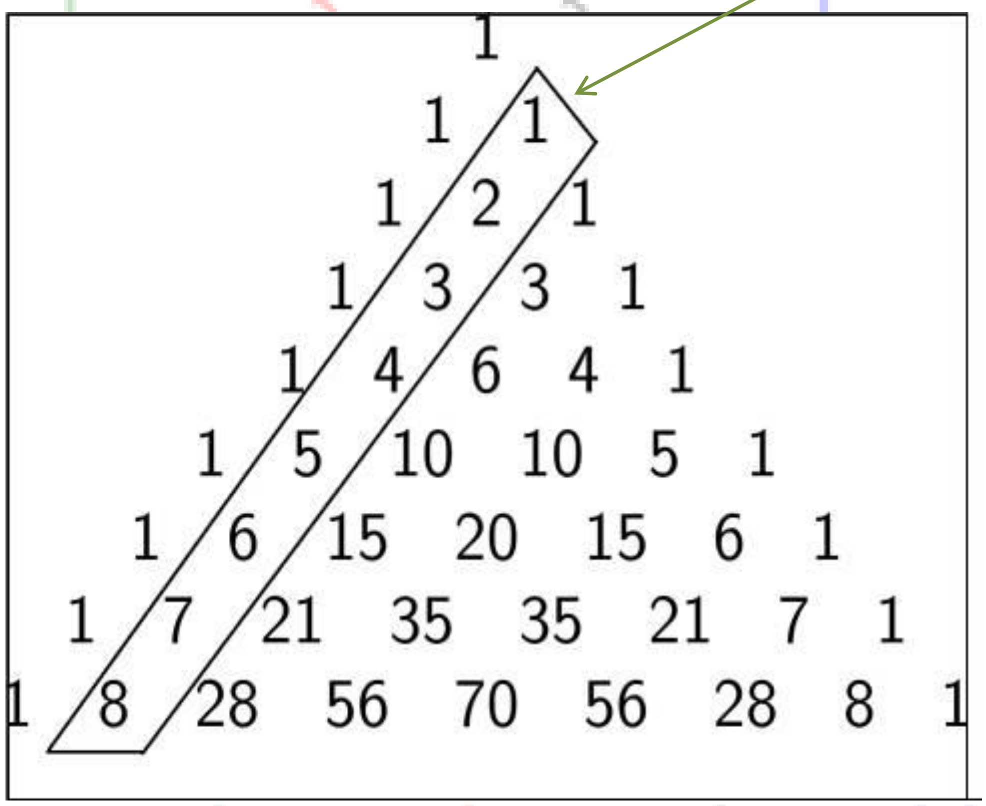
- Números naturales
- Números triangulares
- Números cuadrados
- Números primos
- Potencias de 2
- Potencias de 11
- El stick de hockey
- Sucesión de Fibonacci
- Binomio de Newton
- Triángulo de Sierpinski
- Número "e"



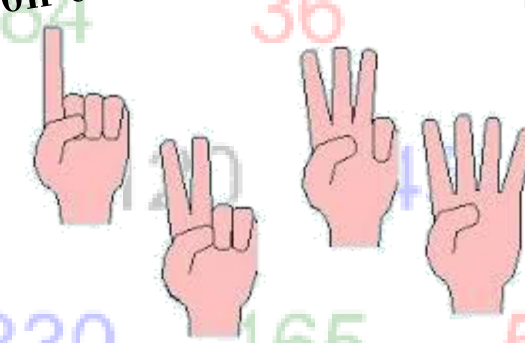
Alberto Meléndez
Irene Simón

Números naturales

En el Triángulo de Pascal podemos encontrar los ***números naturales*** directamente en la ***segunda diagonal***:

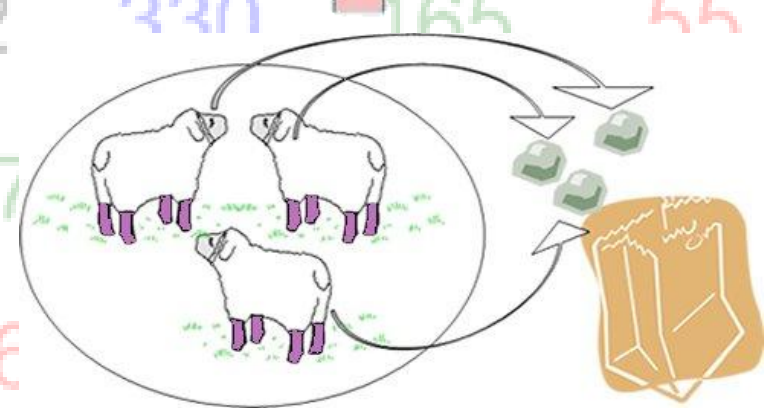


Los Números Naturales nos permiten contar. Desde antiguo, las civilizaciones han tenido la necesidad de contar elementos, lo que se resuelve con el uso de estos números, de diversas formas y con distintas grafías



٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9



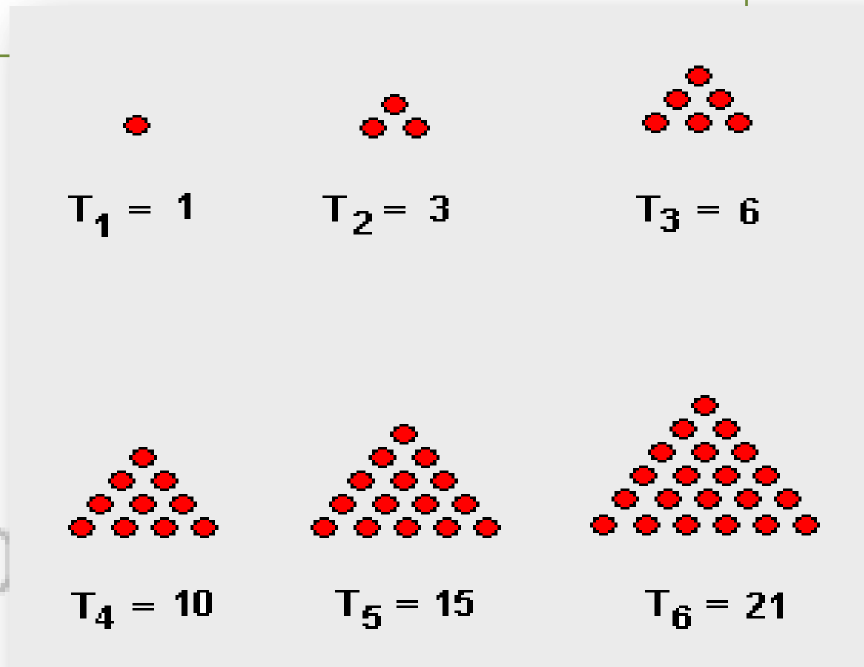
I II III IV V VI VII VIII IX

Julio Lopez
Raul Córdova

Los números triangulares

Un **número triangular** es aquel que puede recomponerse en la forma de un **triángulo equilátero.** Estos números fueron estudiados por Pitágoras y los pitagóricos.

El primer número triangular es el uno



$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Si T_n = nº triangular se cumple se cumple esta expresión

CURIOSIDAD:

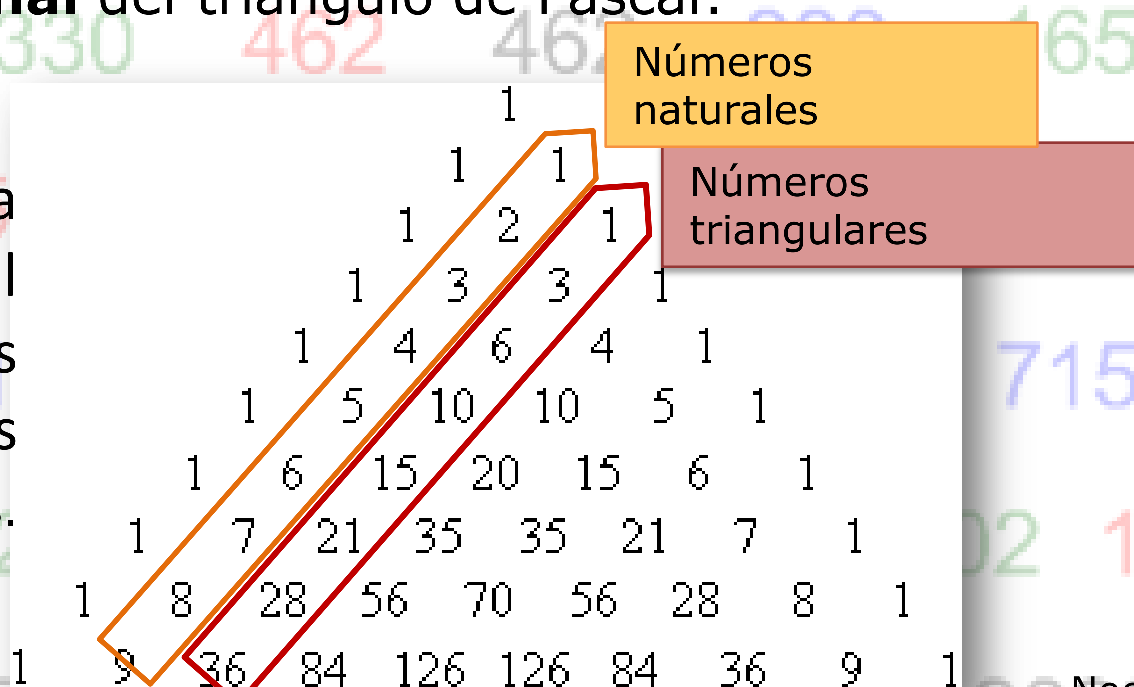
Si se **suman dos números triangulares consecutivos,** se llega a tener como resultado un **número cuadrado.**

Ejemplos:

$\left.\begin{array}{l} 3+6\ \ = 9 \\ 6+10 = 16 \end{array}\right\}$ *Nº cuadrados*

Los **números triangulares** aparecen directamente en la **tercera diagonal** del triángulo de Pascal:

Además en la segunda diagonal también podemos encontrar los números naturales.

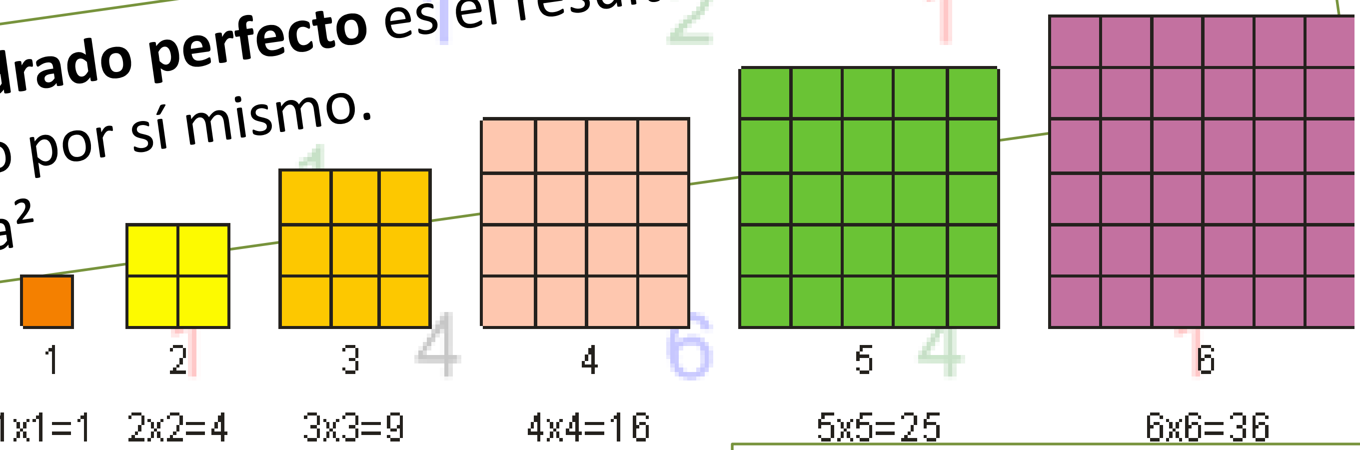


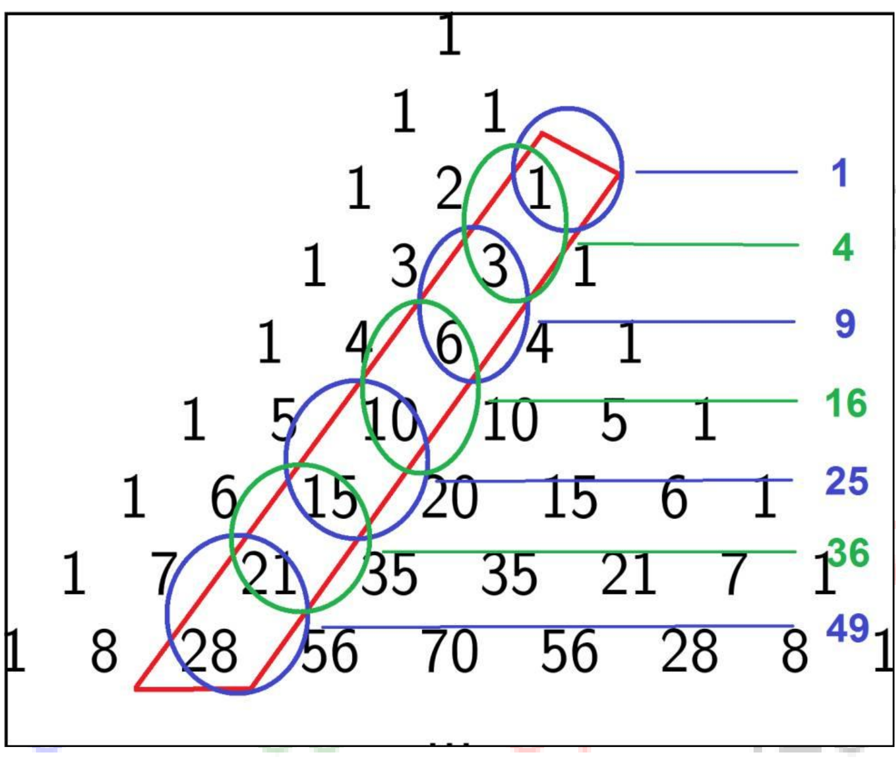
Noelia Sánchez
Eva León

Los números cuadrados

Un **cuadrado perfecto** es el resultado de multiplicar un número por sí mismo.

$a \cdot a = a^2$





En el Triángulo de Tartaglia los podemos encontrar **en la 3ª diagonal**, sumándolos de dos en dos consecutivos:

$1=1^2$

$1+3=4=2^2$

$3+6=9=3^2$

$6+10=16=4^2$

$10+15=25=5^2$

…

Observa que la base del cuadrado es ***NºFila-1***

¿Quieres calcular el cuadrado de un número próximo a 50?

Este truco sirve para los números entre el 41 y el 59:

1. Resta 25 al número. El resultado serán los dos primeros dígitos del cuadrado buscado.

2. Halla la diferencia entre 50 y el número y elévala al cuadrado: el resultado serán las dos últimos cifras del cuadrado buscado.

Haz tus cálculos y compruébalos en la tabla.

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$	$31^2 = 961$	$41^2 = 1681$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$22^2 = 484$	$32^2 = 1024$	$42^2 = 1764$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	$33^2 = 1089$	$43^2 = 1849$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	$24^2 = 576$	$34^2 = 1156$	$44^2 = 1936$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	$35^2 = 1225$	$45^2 = 2025$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$26^2 = 676$	$36^2 = 1296$	$46^2 = 2116$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$27^2 = 729$	$37^2 = 1369$	$47^2 = 2209$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$28^2 = 784$	$38^2 = 1444$	$48^2 = 2304$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	$29^2 = 841$	$39^2 = 1521$	$49^2 = 2401$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$30^2 = 900$	$40^2 = 1600$	$50^2 = 2500$

Diego Escuder Ruiz
Pablo Cervera Polo

Números primos

Si el número de la fila es un **número primo**, todos los números de esa fila serán divisibles por él (menos el 1, claro).

NÚMEROS PRIMOS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1 ------------------------------Fila 0
1 1 ----------------------------Fila 1
1 2 1 -------------------------Fila 2
1 3 3 1 ----------------------Fila 3
1 4 6 4 1 ----------------Fila 4
1 5 10 10 5 1 --------------Fila 5
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

EJEMPLOS:

Con el **número 7**: En la fila 7 aparecen los siguientes números (1,7,21,35,35,21,7,1). Sin incluir el número 1 todos los demás son divisibles entre 7.

Con el **número 11 :** En la fila 11 aparecen los siguientes números (1, 11, 55, 165, 330, 462, 462, 330, 165, 55, 11, 1) . Sin incluir el número 1 todos los demás son divisibles entre 11.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

La ***criba de Eratóstenes*** nos permite obtener los **números primos**. Por ejemplo, para obtener los primos menores de 100, tacharemos en una tabla los múltiplos de 2, de 3, de 5 y de 7.

- *Rojos: Son los numeros pares.*
- *Verdes: Son los multiplos de 3.*
- *Azul: Son los multiplos de 5.*
- *Amarillos: Son lo multiplos de 7.*
- *Fucsia: Son los numeros primos.*

Ana Aranda Lucia
Noelia del Val Allueva

Potencias de 2

Los **potencias de base 2** aparecen al sumar todos los valores de cualquier fila del triángulo de Tartaglia.

El **exponente** al que elevamos la potencia de 2 es igual al **número de fila.**

1	**Fila 0**	**1**
1 1	**Fila 1**	**2**
1 2 1	**Fila 2**	**4**
1 3 3 1	**Fila 3**	**8**
1 4 6 4 1	**Fila 4**	**16**
1 5 10 10 5 1	**Fila 5**	**32**
1 6 15 20 15 6 1	**Fila 6**	**64**

Fila **0**: $1=2^{0}$

Fila **1**: $1+1=2=2^{1}$

Fila **2**: $1+2+1=4=2^{2}$

Fila **3**: $1+3+3+1=8=2^{3}$

Fila **4**: $1+4+6+4+1=16=2^{4}$

Fila **5**: $1+5+10+10+5+1=32=2^{5}$

Fila **6**: $1+6+15+20+15+6+1=64=2^{6}$

...

María García Cutando
Tatevik Abrahamyan

Potencias de 11

		11 elevado a:
1	1	0
1 1	11	1
1 2 1	121	2
1 3 3 1	1331	3
1 4 6 4 1	14641	4
1 5 10 10 5 1	161051	5
1 6 15 20 15 6 1	1771561	6

Si tomamos las cifras de cada fila como las de un número, tenemos las **potencias de 11**.

Fila 0: $1=11^0$

Fila 1: $11=11^1$

Fila 2: $121=11^2$

Fila 3: $1331=11^3$

Por ejemplo para hallar 11^{10} nos fijaremos en la fila 10:

```
                        1
                      1   1
                    1   2   1
                  1   3   3   1
                1   4   6   4   1
              1   5  10  10   5   1
            1   6  15  20  15   6   1
          1   7  21  35  35  21   7   1
        1   8  28  56  70  56  28   8   1
      1   9  36  84 126 126  84  36   9   1
    1  10  45 120 210 252 210 120  45  10   1
  1  11  55 165 330 462 462 330 165  55  11   1
1  12  66 220 495 792 924 792 495 220  66  12   1
```

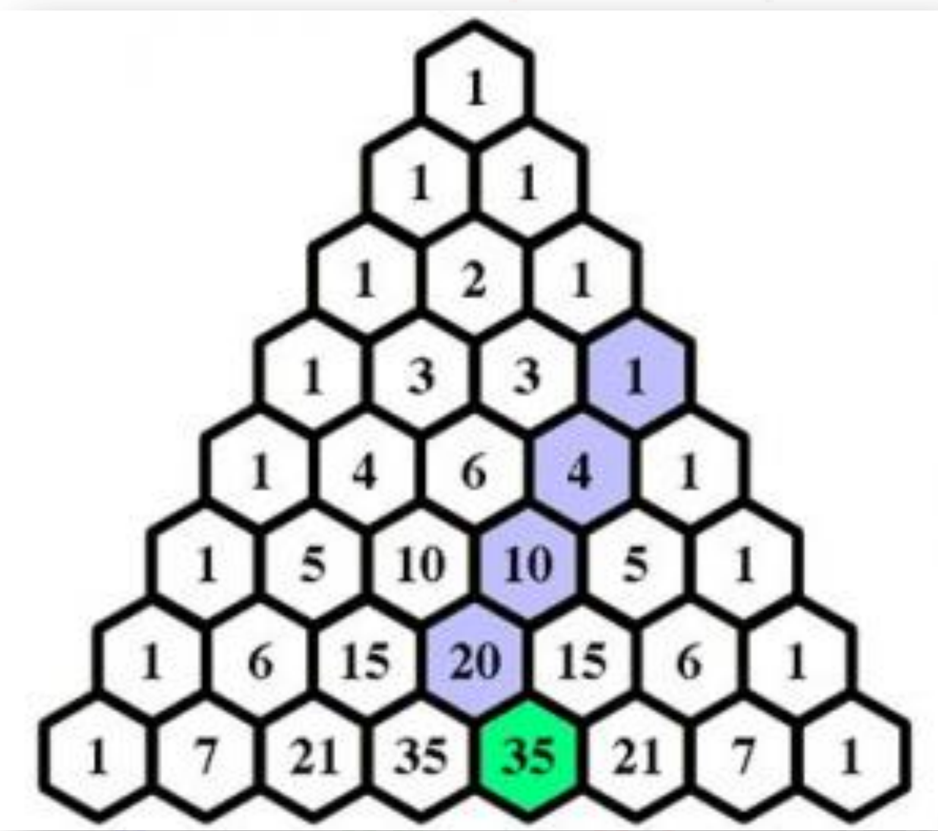
```
  1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
  1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    4 5 0 0 0 0 0 0 0 0
    1 2 0 0 0 0 0 0 0 0
      2 1 0 0 0 0 0 0 0
        2 5 2 0 0 0 0 0
          2 1 0 0 0 0 0
            1 2 0 0 0 0
+               4 5 0 0
                  1 0 0
                      1
  ---------------------
  2 5 9 3 7 4 2 4 6 0 1 = 11^10
```

Tomamos el primer número de la fila empezando por la izquierda, siempre será 1. Y colocamos tantos ceros como números haya en la fila (rodeados en azul). Después sumaremos el siguiente número repitiendo el mismo proceso.

Joaquín Alonso Jauregui
David Gamón Llorente

El *stick de hockey*

Es una escalera imaginaria con la **forma de un stick de hockey que comienza** empezando desde desde el 1 de uno de los lados y describe una diagonal, con la longitud que se quiera. La **suma de todos los números que la integran se encuentra justo debajo de ellos en la diagonal contraria** con la forma del stick.



Por ejemplo, en la imagen se ve un stick en el que las cifras de la diagonal en azul son los sumandos, y la cifra verde es la suma:

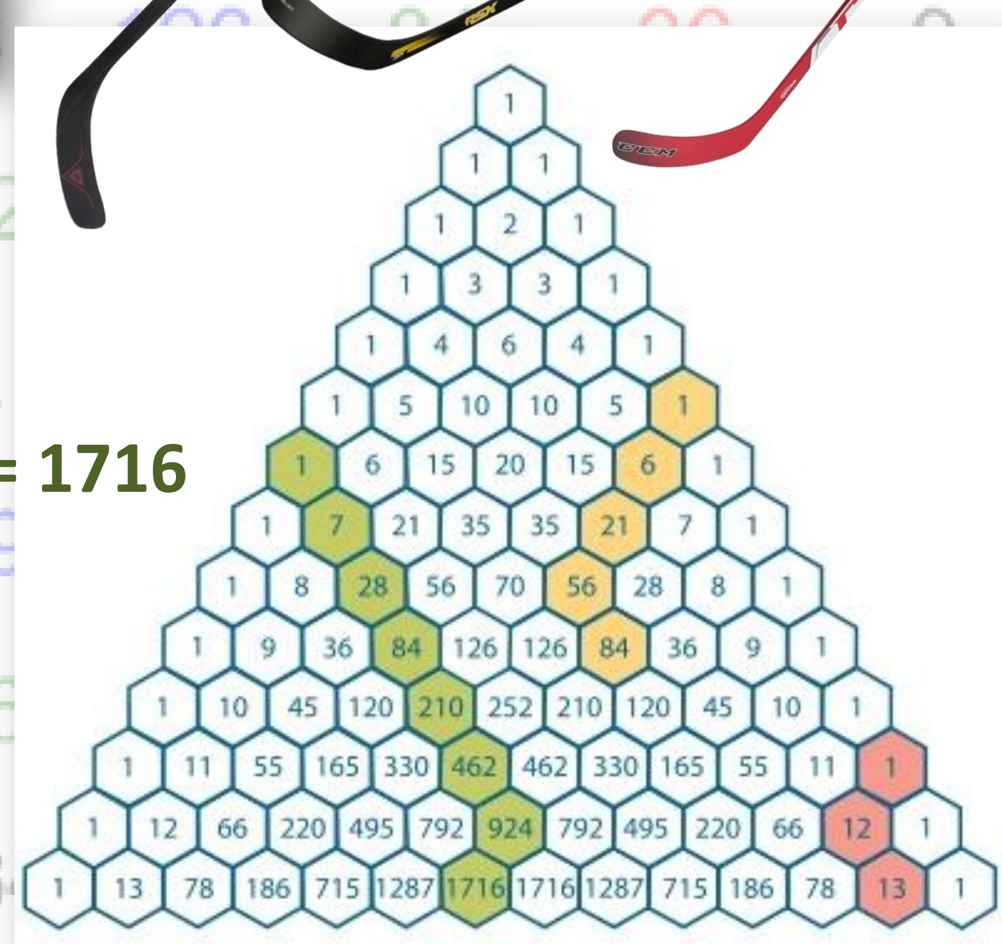
1 + 4 + 10 + 20 = 35

Otros ejemplos:

1+7+28+84+210+462+924 = 1716

1+6+21+56=84

1+12=13



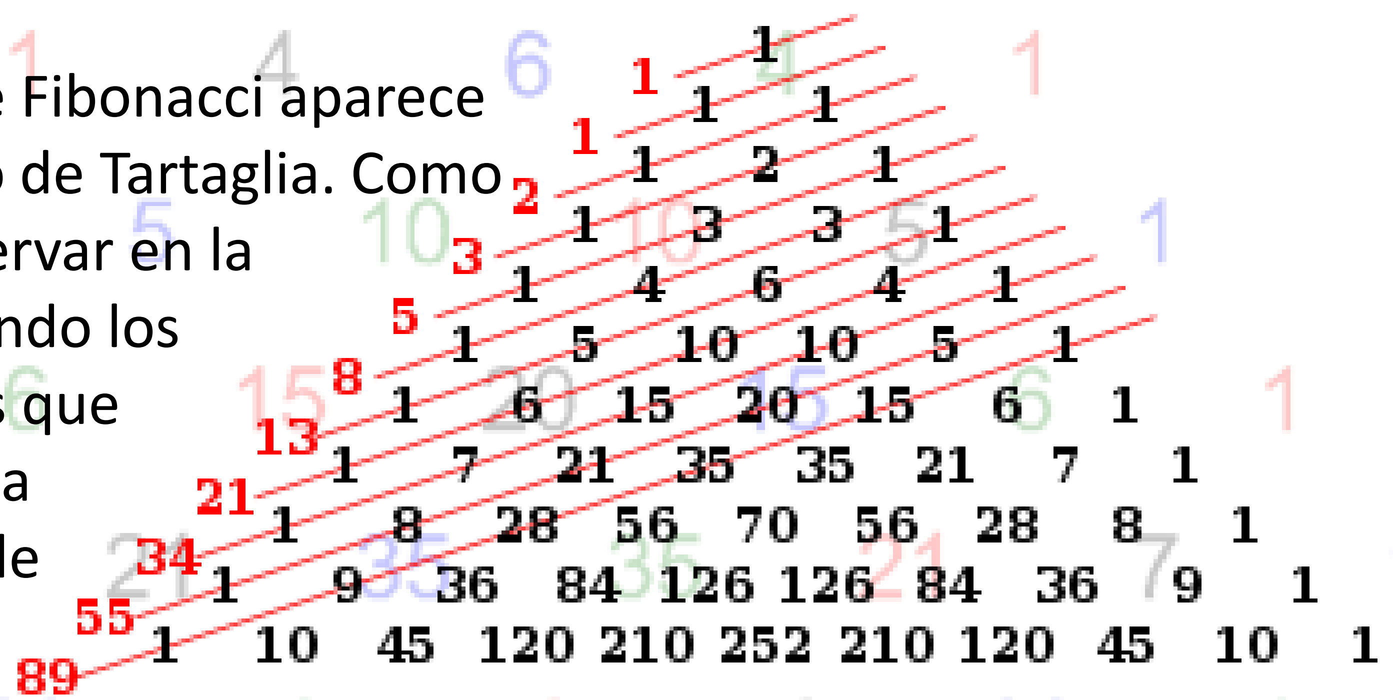
Pablo Lorente
Álvaro Sánchez

La sucesión de Fibonacci

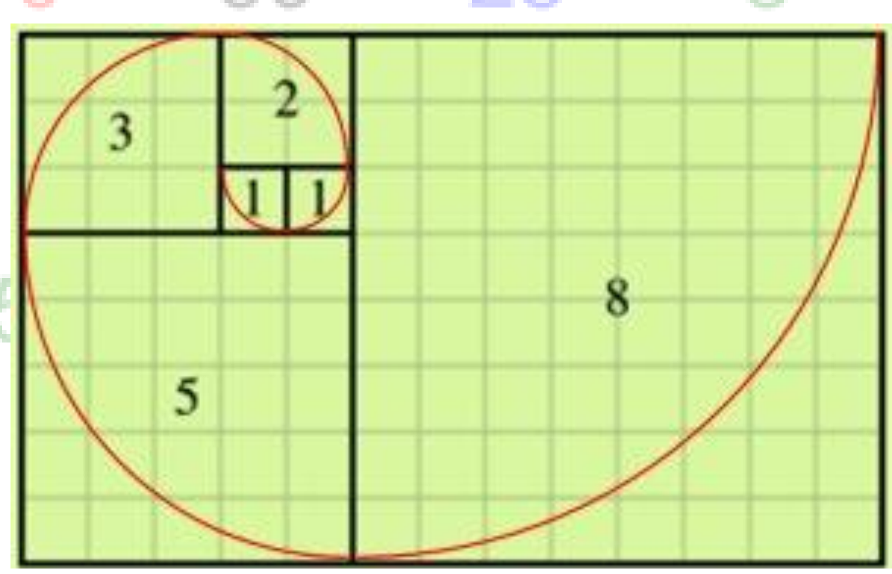
La ***sucesión de Fibonacci*** es una sucesión infinita de números naturales que comienza con los números 1, 1 y a partir de estos **cada término es la suma de los dos anteriores**.

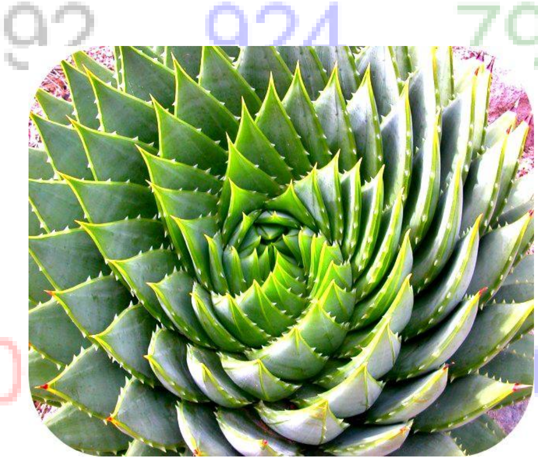
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

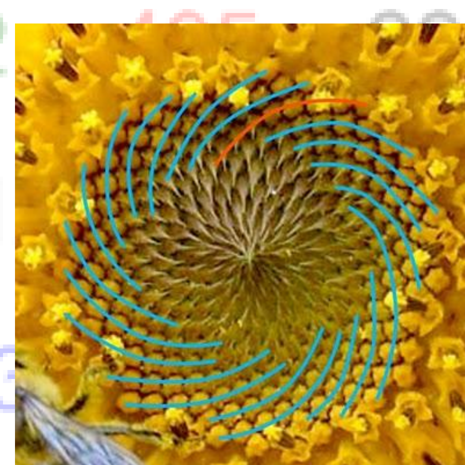
La sucesión de Fibonacci aparece en el triángulo de Tartaglia. Como podemos observar en la imagen, sumando los valores por los que pasa cada recta oblicua nos sale un térino de la sucesión.



Es fácil encontrarla en la espiral del mismo nombre, trazada a partir de cuadrados. También aparece frecuentemente en la naturaleza, como en las ramas de los árboles, en la disposición de las hojas en el tallo, flores de girasoles, alcachofas y en piñas de coníferas .







Alejandra Simion
Andreea Pana

Binomio de Newton

Antes de entrar con el binomio de Newton recordaremos lo que es:

Factorial de un número n: $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1$ Ejemplo: 5! = 5·4·3·2·1

Número combinatorio "n sobre m" $\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{(m-n)!\,n!}$

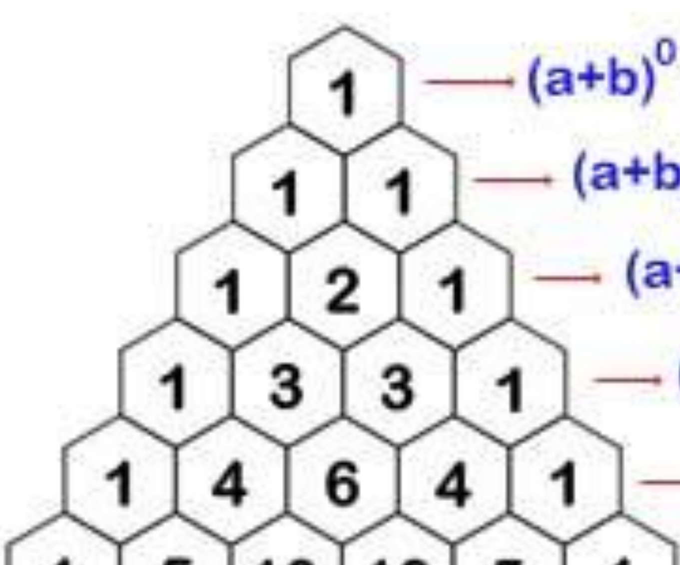
Ejemplo: $\binom{3}{2} = \dfrac{3!}{(3-2)!\,2!} = \dfrac{6}{1.2} = 3$

Llamamos ***Binomio de Newton*** a la potencia de la suma de dos términos. Isaac Newton expresó su valor mediante los números combinatorios así:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots +$$
$$+ \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Estos números combinatorios del binomio de Newton aparecen en el triángulo de Tartaglia de forma que **la fila *n* contiene los coeficientes del desarrollo de *(a+b)*^{n}**:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$



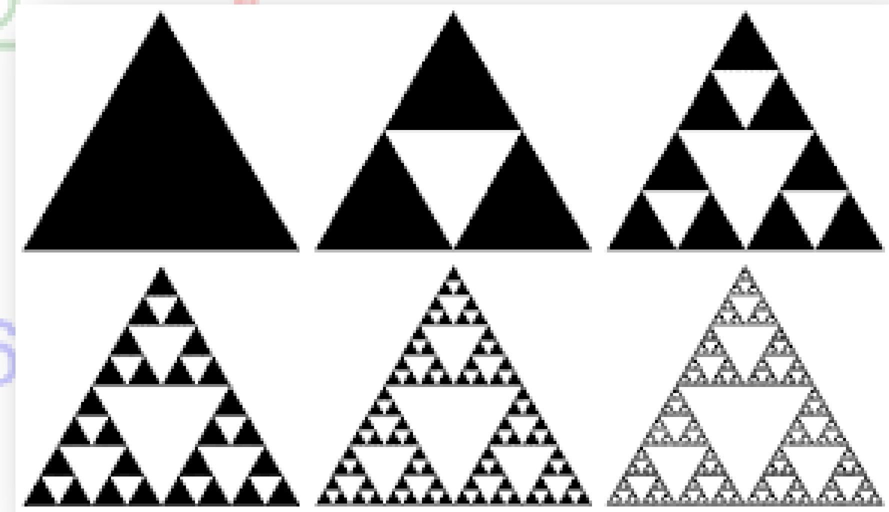
$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1.a + 1.b$$
$$(a+b)^2 = 1.a^2 + 2.a.b + 1.b^2$$
$$(a+b)^3 = 1.a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + 1.b^3$$
$$(a+b)^4 = 1.a^4 + 4.a^3.b + 6.a^2.b^2 + 4.a.b^3 + 1.b^4$$

... ...

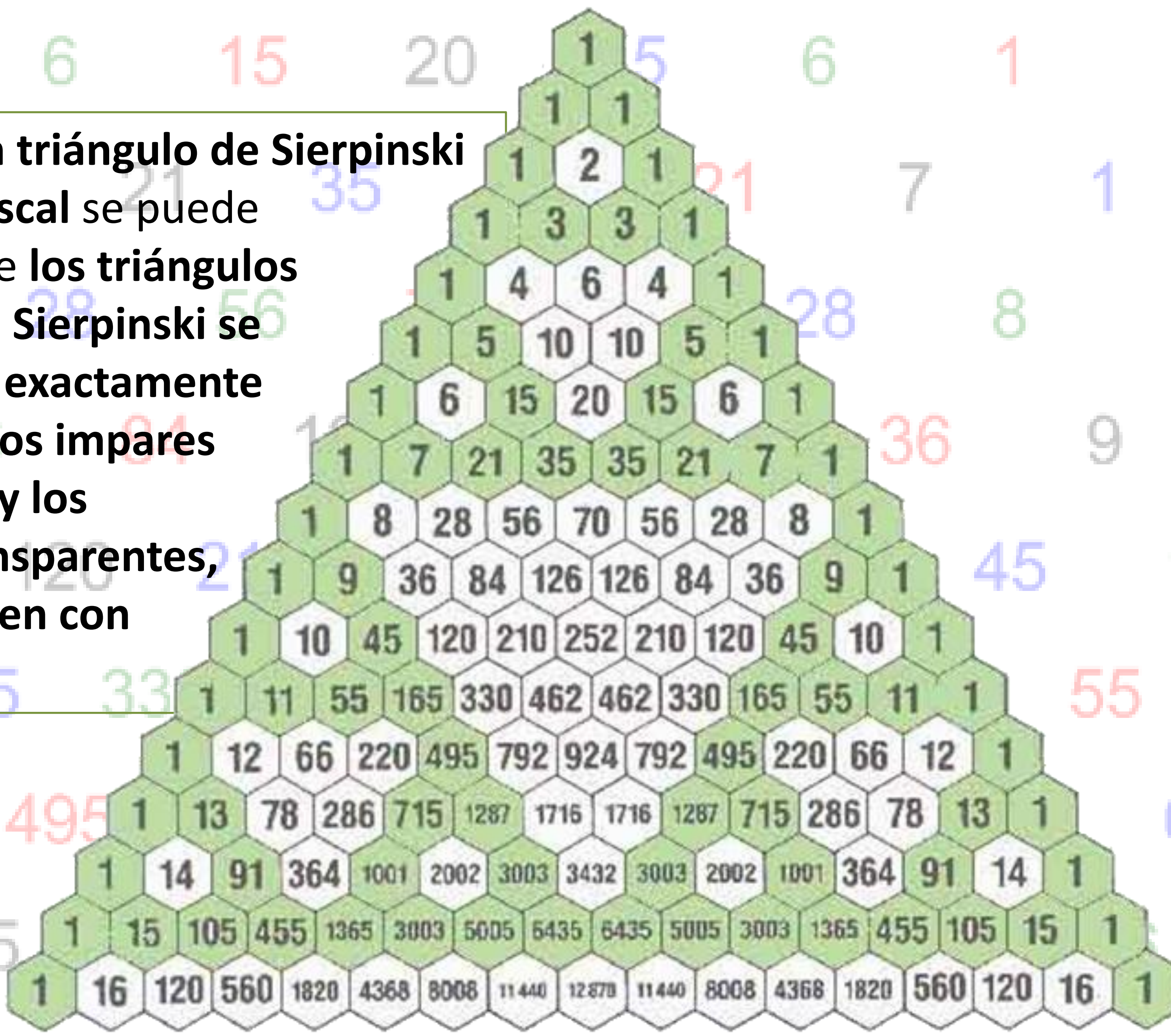
Pilar Zabal Martínez
Jorge Pérez Castañosa

Fractal de Sierpinski

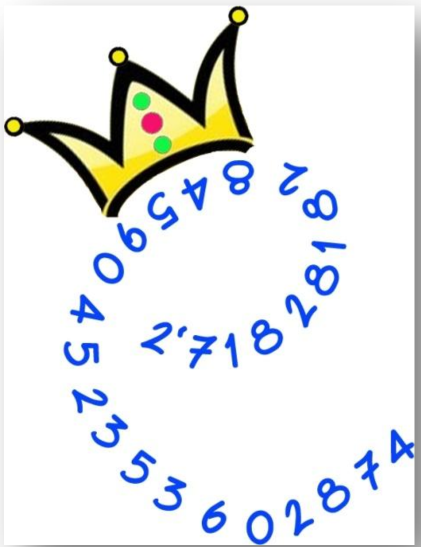
El triángulo de Sierspienski es un fractal que se puede construir a partir de un triángulo equilátero, “extrayendo” triángulos interiores cuyos vértices están en el punto medio de los lados



Si ponemos **un triángulo de Sierpinski sobre el de Pascal** se puede comprobar que **los triángulos opacos del de Sierpinski se corresponden exactamente con los números impares del de Pascal, y los triángulos transparentes, se corresponden con los pares.**



Alejando Ballestín Tornos
Miguel Gracia Ariñez



Número e

El número e es un número real e irracional , su valor es 2.71828…
Se obtiene como el límite de una sucesión:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Lo podemos encontrar en el Triángulo de Pascal, aunque no aparece a simple vista…

						1							……………1
					1		1						……………1
				1		2		1					……………2
			1		3		3		1				……………9
		1		4		6		4		1			……………96
	1		5		10		10		5		1		…………2500
1		6		15		20		15		6		1	…………162000

1.- Multiplicamos los elementos de cada fila. Obtenemos así la siguiente lista de números:

{1, 1, 2, 9, 96, 2500, 162000,…}

2.- Dividimos ahora cada número obtenido entre el anterior

{1, 2, 4’5, 10’666…, 26’0417, 64,8,…}

3.- De nuevo **dividimos cada número de la nueva lista entre el anterior**:

{2, 2’25, 2’370370…, 2’44140625, 2’48832,…}

Si continuamos repitiendo el proceso con la lista que vamos obteniendo encontramos que **los valores de esta lista se acercan cada vez más al número e**.

Con este doodle celebró Google en 2013 el 306 aniversario del nacimiento de ***Leonard Euler***, a quien debe su nombre el ***número e***.

Sofía Villanueva Latorre
Sara Cortés Marco